

En un certain sens, toute courbe est une transformée de la plus simple d'entre elles, à savoir la droite, et les courbes sont donc toutes des transformées les unes des autres. Nous allons présenter dans cet article les plus classiques de ces transformations, en commençant par les plus simples. Ceci nous permettra de relier certaines courbes remarquables entre elles et d'en effectuer une classification.

Lorsque rien n'est précisé, il s'agira toujours de courbes planes. Ce que nous appelons « le plan » est le plan affine réel euclidien P isomorphe à $\mathbb{R}^2$; ce que nous appelons « le plan conforme » et notons $\hat{P}$, est le plan muni d'un point à l'infini, homéomorphe à la sphère S^2 , et ce que nous appelons « le plan projectif » et notons $\bar{P}$ est le plan muni de sa droite de l'infini, ensemble des points à l'infini de chaque direction de droite.

A) Transformations globales.

Nous considérons ici les transformations globales du plan dans lui-même, qui n'agissent donc pas seulement sur une courbe particulière, mais sur toute sous-partie du plan.

I) Transformations affines.

Une *transformation affine* est caractérisée, moyennant le théorème fondamental de la géométrie affine réelle, par le fait d'être une bijection du plan dans lui-même *conservant les alignements*. C'est Euler, en 1748, qui est à l'origine de ce terme « affine », car dit-il, « deux courbes images l'une de l'autre par une telle transformation présentent entre elles une certaine affinité ».

On montre qu'une transformation affine peut se décomposer en produit d'une isométrie, d'une homothétie, et d'une affinité ou d'une transvection (voir la définition de ces trois derniers termes dans la figure 7 ci-après).

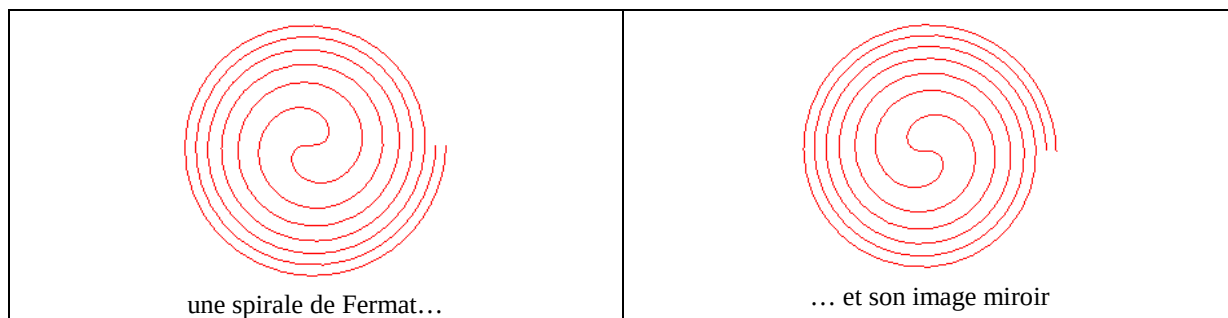
1) Isométries.

Les *isométries* sont les transformations du plan *conservant les distances* ; une condition équivalente est qu'elles soient affines (i.e. conservent les alignements) et conformes ou anticonformes (i.e. conservent les angles non orientés). Celles d'entre-elles qui conservent les angles *orientés*, appelées *déplacements*, sont constituées des *rotations* et *translations*. Elles ne sont pas vécues véritablement comme des transformations, mais comme de simples changements de position. Les anciens ne parlaient-ils pas dans le cas de figures images l'une de l'autre par un déplacement de figures « égales »?

Les transformations *conservant les distances mais renversant les angles*, appelées *antidéplacements*, et constitués des *réflexions*, transforment une courbe en son « image miroir ».

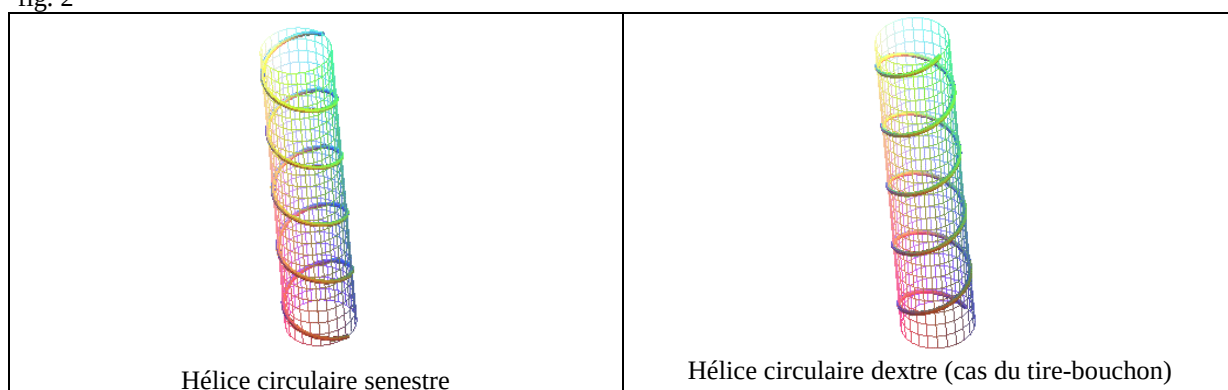
Remarquons que tout antidéplacement d'une courbe ayant un axe de symétrie revient en fait à un déplacement de cette courbe ; un antidéplacement ne sera donc vécu comme une transformation que si cette courbe n'est pas symétrique ; c'est par exemple le cas des spirales (figure 1):

fig. 1



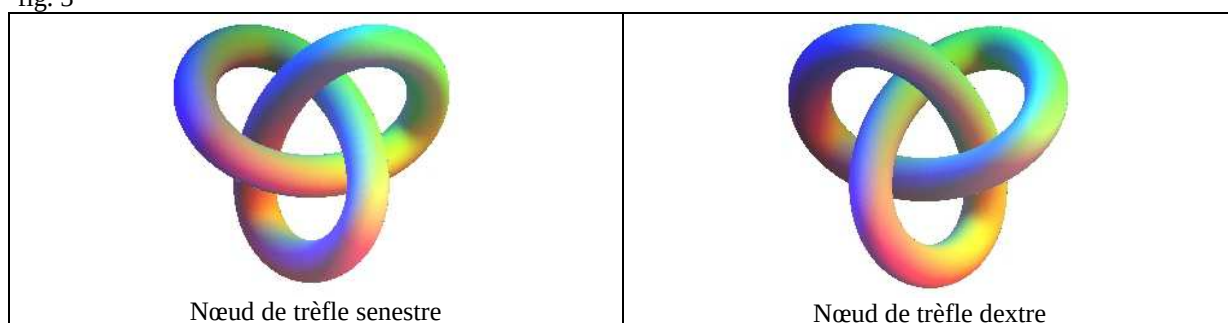
Cependant, une réflexion plane peut-être obtenue par un demi-tour en dimension 3 (résultat qui est un cas particulier du fait que toute isométrie indirecte de $\mathbb{R}^n$ est la restriction à $\mathbb{R}^n$ d'une isométrie directe de $\mathbb{R}^{n+1}$) ; concrètement, il suffit de retourner la feuille sur laquelle est dessinée la courbe et de regarder par transparence pour obtenir son image miroir. De même, deux courbes gauches images miroir l'une de l'autre sont obtenues par un déplacement dans $\mathbb{R}^4$; mais comme nous n'avons pas accès à une quatrième dimension dans le monde réel, deux courbes gauches sans plan de symétrie et images miroir l'une de l'autre sont réellement vécues comme distinctes ; par exemple, ces deux hélices :

fig. 2



ou ces deux nœuds de trèfle (figure 3):

fig. 3



La notion est d'importance puisque certaines substances sont toxiques ou non suivant quelles sont dextrogyres ou lévogyres.

2) Similitudes.

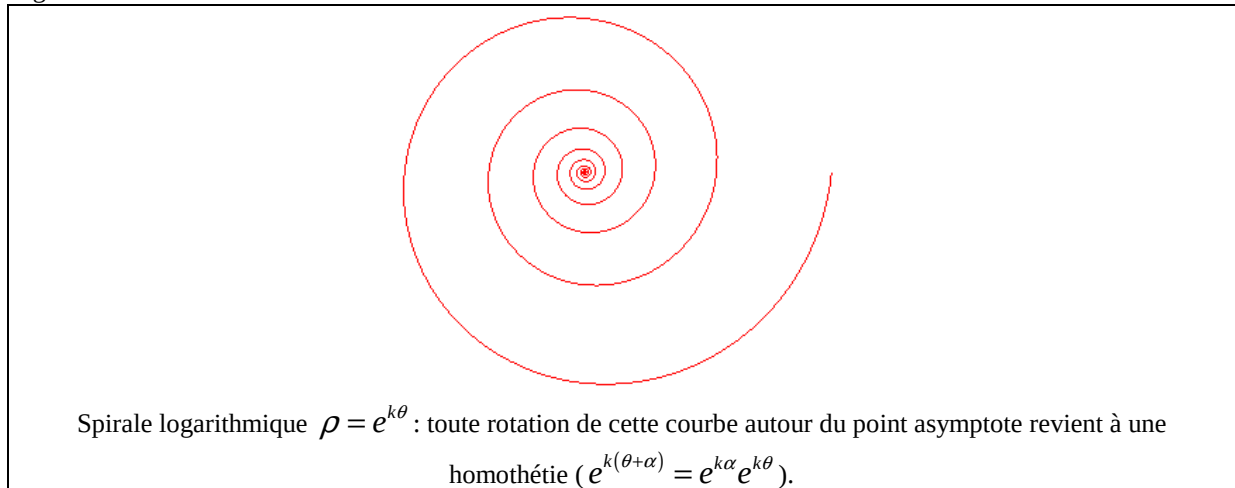
Les *similitudes* sont les bijections du plan conservant les rapports de distances ; on montre facilement que ce sont les composées d'une isométrie avec une homothétie.

Les similitudes directes sont vécues comme de simples changements d'échelle et les similitudes indirectes, comme des changements d'échelle sur l'image miroir.

On confond en général une courbe et sa classe de similitude : « la » parabole est un concept qui regroupe toutes les paraboles, lesquelles sont semblables entre elles.

Mentionnons ici la spirale logarithmique qui est telle que toute similitude revient en fait à une isométrie (figure 4).

fig. 4



3) Autres transformations affines.

Elles conservent les alignements, mais pas forcément les angles. Les axes de symétrie orthogonale deviennent par exemple des axes de symétrie oblique.

Quelques exemples :

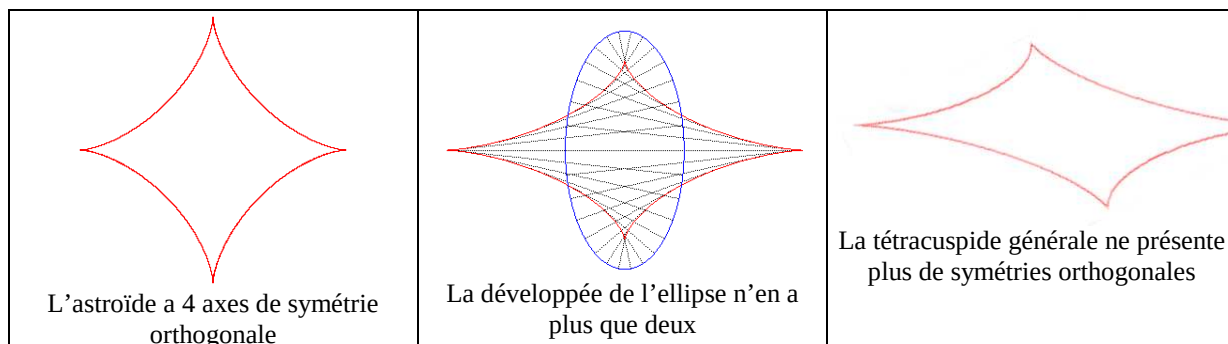
- un *cercle* est transformé en une *ellipse*, qui, si ce n'est pas un cercle, n'a plus que deux axes de symétrie orthogonaux au lieu d'une infinité.

- toutes les paraboles étant semblables entre elles, et l'image par une transformation affine d'une conique étant une conique de la même famille, une transformation affine quelconque d'une *parabole* revient toujours à une similitude. Ceci distingue la parabole ($y = x^2$) de la *chaînette* ($y = \cosh x$) dont l'image par une affinité ne donne pas forcément une courbe semblable.

- L'*astroïde* $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ devient une *tétracuspide* (ayant quatre rebroussements) qui

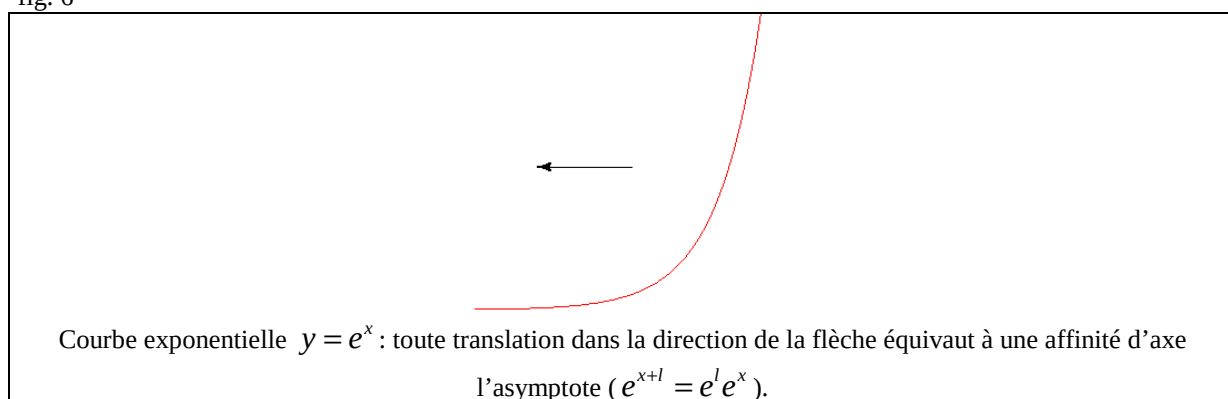
n'a plus forcément d'axe de symétrie orthogonale. On rencontre ces courbes comme développée de l'ellipse (figure 5).

fig. 5



- La courbe de la fonction exponentielle est caractérisée par le fait que sa translation le long de son asymptote équivaut à une affinité orthogonale d'axe cette asymptote (figure 6).

fig. 6



II) Transformations projectives.

1) Définition et cas des homologies.

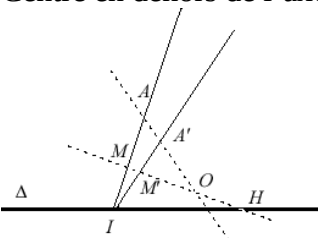
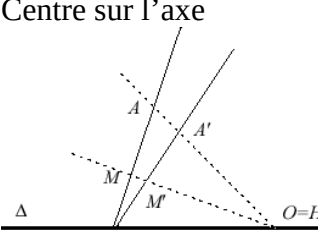
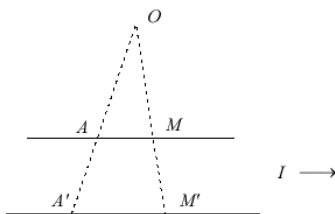
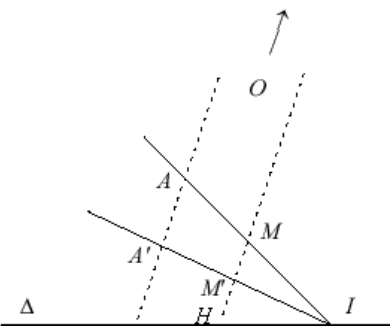
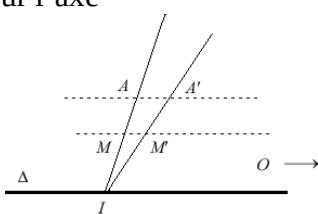
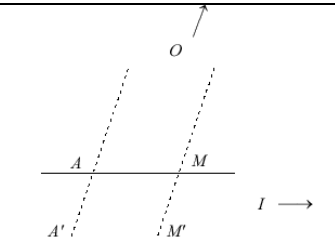
D'après le théorème fondamental de la géométrie projective réelle, les *transformations projectives* ou *homographies* (terme introduit par Chasles au XIX^e siècle) peuvent, comme les transformations affines, être caractérisées par le fait que ce sont des bijections préservant l'alignement, à condition de se placer non plus dans le plan affine mais dans son complété projectif ; elles comprennent les transformations affines, mais aussi les transformations conservant globalement les droites du plan affine, sauf deux, l'une étant envoyée à l'infini et l'autre provenant de celle de l'infini.

Un cas important de transformation projective est constitué par les *homologies*, définies pour la première fois par Poncelet ; on montre en effet que toute homographie non affine est composée d'un déplacement et d'une homologie.

Les homologies sont les homographies différentes de l'identité laissant fixes les points d'une droite Δ (appelée *axe de l'homologie*) ; d'après le théorème de Désargues, cela équivaut à ce qu'il existe un point O , *centre de l'homologie*, tel que l'image de tout point M soit alignée avec O et M ; **lorsque le centre n'est pas sur l'axe**, le birapport $k = (O, H, M, M')$ où M' est l'image de M et H le point d'intersection de la droite (OM) avec l'axe est alors constant, et l'homologie est entièrement déterminée par la donnée de son centre, de son axe et de son birapport (ou *coefficient d'homologie*) $k \in \mathbb{R}^*$.

La figure 7 montre la classification affine des homologies ; on notera qu'une homologie est affine si et seulement si l'axe ou le centre est à l'infini.

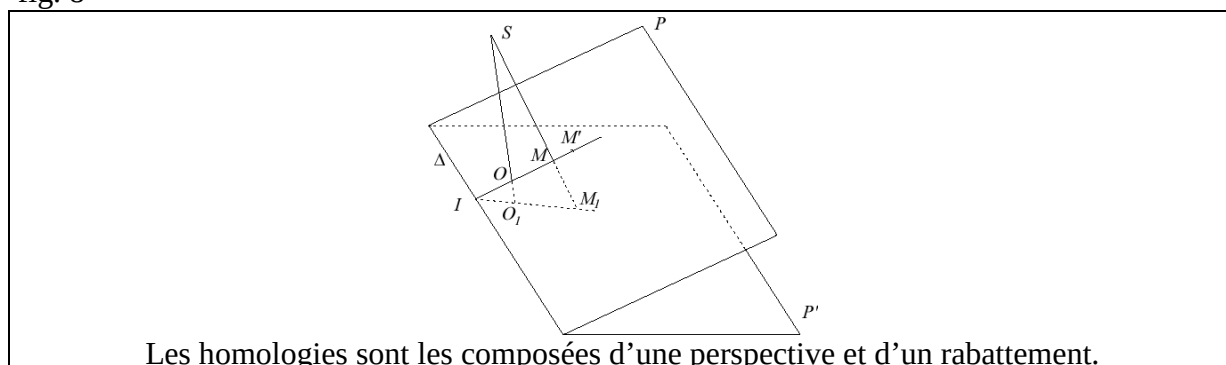
fig. 7 Classification affine des homologies.

	Axe à distance finie	Axe à l'infini
Centre à distance finie	Centre en dehors de l'axe  homologie générale : $(O, H, M, M') = k$ Centre sur l'axe  homologie spéciale	 homothétie de rapport k $(\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM})$
Centre à l'infini	Centre en dehors de l'axe  affinité de rapport $1/k$ $(\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{k}\overrightarrow{HM})$ Centre sur l'axe  transvection	 translation

Les homologies sont aussi appelées par certains auteurs des *perspectives*, pour la raison suivante : plongeons le plan $\bar{P}$ dans un espace projectif de dimension 3 et considérons un

plan $\bar{P}'$ coupant $\bar{P}$ suivant la droite Δ ainsi qu'un point S (cf. figure 8) ; la *perspective* de centre S de $\bar{P}$ sur $\bar{P}'$ est l'application qui à M de $\bar{P}$ fait correspondre le point M_1 de $\bar{P}'$ tel que S, M et M_1 sont alignés. Si l'on rabat le plan $\bar{P}_1$ sur le plan $\bar{P}$ par rotation autour de Δ (ou par translation si Δ est à l'infini), le point M_1 devient un point M' et l'application $M \mapsto M'$ est une homologie de $\bar{P}$ d'axe Δ ; dans le cas où Δ n'est pas à l'infini, son centre est le point O tel que (SO) soit orthogonale au plan bissecteur de $\bar{P}$ et $\bar{P}'$. On obtient ainsi toutes les homologies.

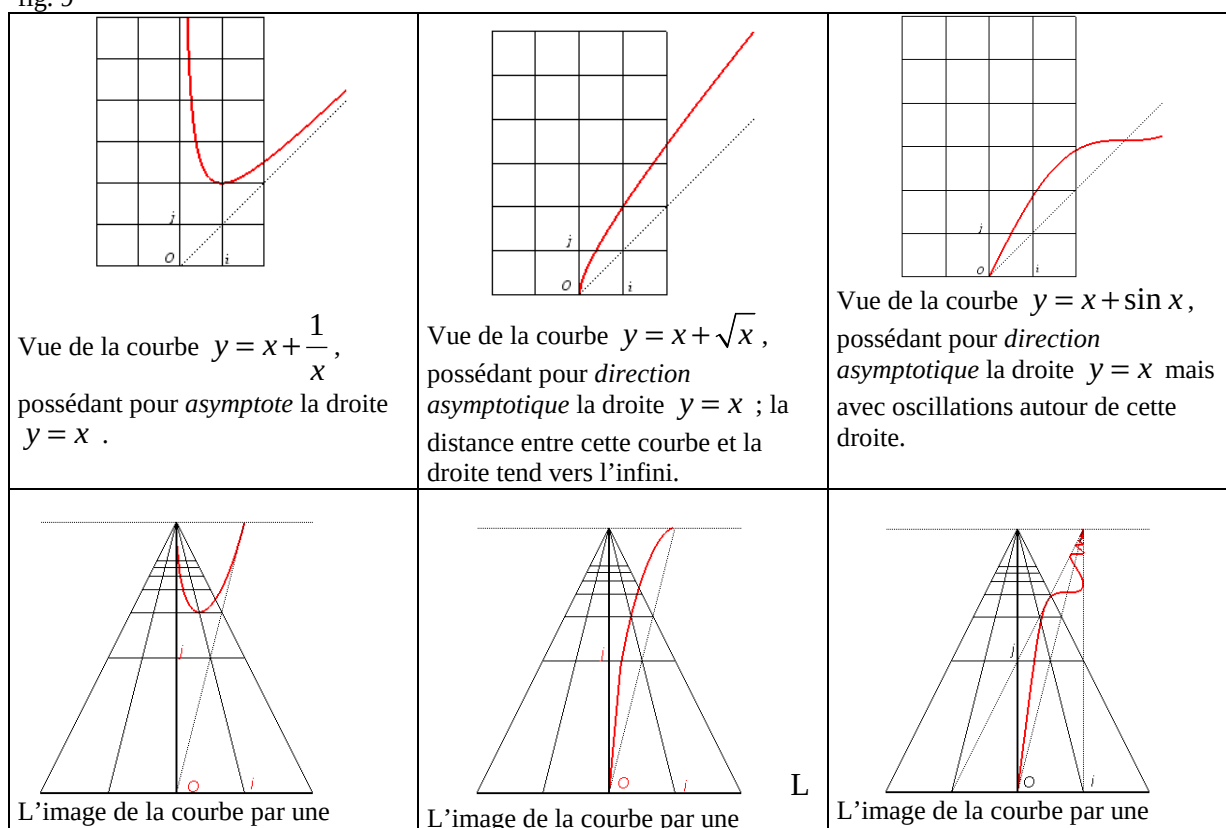
fig. 8



2) Application à l'étude des branches infinies.

Une courbe possède une branche infinie de direction asymptotique donnée si et seulement si cette courbe passe par le point à l'infini de cette direction. Une homographie permet de ramener cette branche infinie à distance finie ; voir des exemples dans la figure 9.

fig. 9



perspective devient <i>tangente</i> à l'image de l'asymptote .	perspective <i>pass</i> e par l'image du point à l'infini de la direction asymptotique mais en étant tangente à l'image de la droite de l'infini.	perspective <i>pass</i> e par l'image du point à l'infini de la direction asymptotique mais n'y possède pas de tangente.
--	---	--

3) Classification projective des courbes algébriques.

Une homographie conserve le caractère algébrique d'une courbe, ainsi que son degré, sa classe et son genre. On va s'intéresser ici aux classes d'équivalence projectives pour les courbes de degré 2 ou 3.

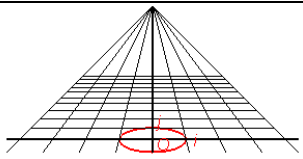
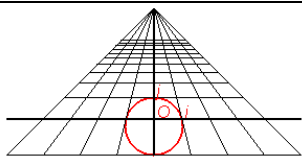
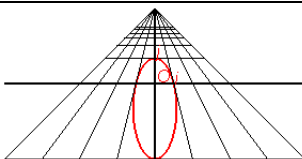
a) Degré 2 : coniques.

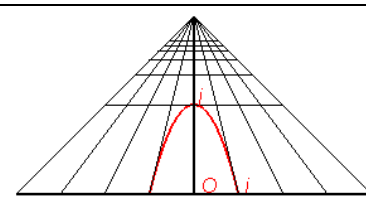
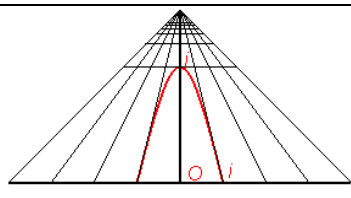
Il n'existe, à homographie près qu'une conique propre (non vide).

En effet ces courbes sont, comme leur nom l'indique, les sections planes non dégénérées du cône de révolution, et sont donc toutes homologues entre elles ; en particulier, toutes peuvent être vues comme différentes perspectives d'un même cercle (figure 9).

fig. 9 : perspectives d'un cercle

L'espace est rapporté au repère orthonormé (O, i, j, k) ; les yeux d'un observateur sont situés en $S(0, -d, h)$; il regarde le cercle trigonométrique $x^2 + y^2 = 1$ du plan horizontal $P : z = 0$, à travers le plan vertical $P' : y = 0$.

		
$d > \sqrt{1+h^2}$: l'observateur voit une ellipse	$d = \sqrt{1+h^2}$: l'observateur voit un cercle.	$1 < d < \sqrt{1+h^2}$: l'observateur voit une ellipse.

	
$d = 1$: l'observateur voit une parabole	$0 < d < 1$: l'observateur voit une branche d'hyperbole (correspondant à la portion du cercle pour $y > -d$).

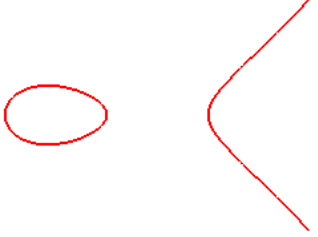
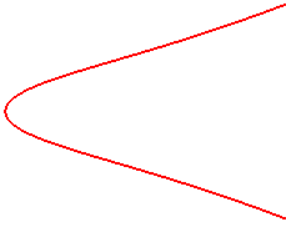
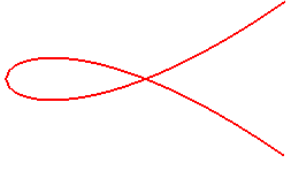
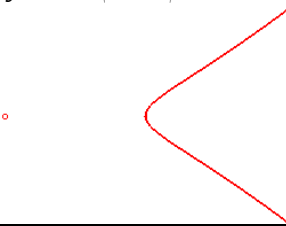
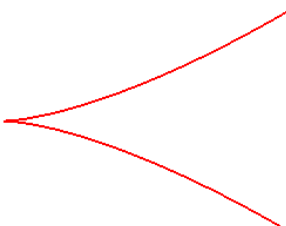
Signalons qu'en dimension n , il existe $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ classes projectives d'hyperquadriques propres non vides ; en particulier en dimension 3, il y a deux classes, représentées par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ et l'hyperboloïde à une nappe $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$.

b) Degré 3 : cubiques.

Newton a montré que toute cubique propre est projectivement équivalente à une *parabole divergente* d'équation : $y^2 = x^3 + px + q$.

La cubique est alors rationnelle si et seulement si $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$ et il y a dans ce cas trois classes d'équivalence projectives, formées des cubiques crunodales, acnodales ou cuspidales. Dans le cas non rationnel (cubique de genre 1, dite « elliptique »), chaque valeur de Δ fournit une classe d'équivalence projective.

fig. 10 : classification projective des cubiques propres réelles

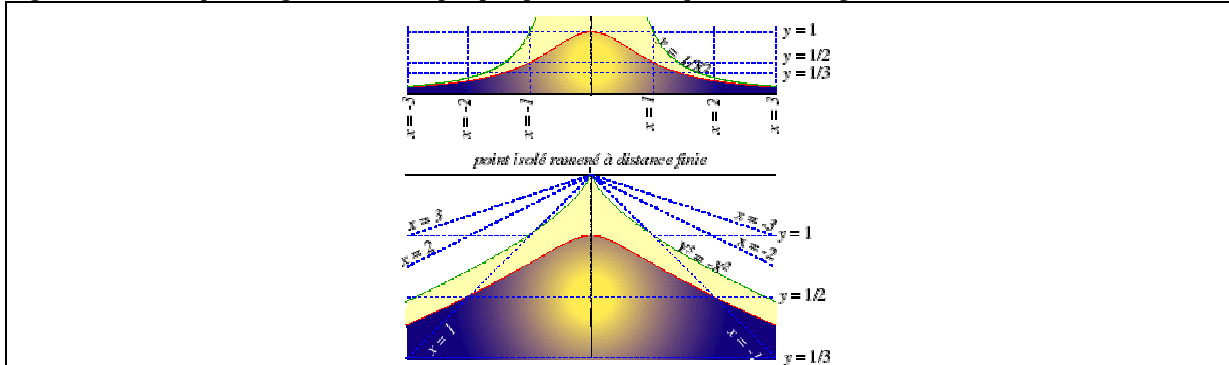
Disposition des racines de $P = X^3 + pX + q$	Forme de la cubique	Exemple
Trois racines réelles distinctes ($\Delta < 0$); Équation cartésienne : $cy^2 = x(x-a)(x-b)$	cubique elliptique à ovale	$y^2 = x x^2 - 1 $ 
Une racine réelle et deux racines non réelles conjuguées $\Delta > 0$; Équation cartésienne : $cy^2 = x((x-a)^2 + b^2)$	cubique elliptique à une branche	$y^2 = x(x^2 + 1)$ 
Deux racines réelles dont une double et $P(x) \geq 0$ au voisinage de la racine double ; Équation cartésienne : $by^2 = x^2(a - x)$	cubique à point double (ou <i>crunodale</i>)	$y^2 = x^2 x + 1 $ 
Deux racines réelles dont une double et $P(x) \leq 0$ au voisinage de la racine double ; Équation cartésienne : $by^2 = x^2(x - a)$	cubique à point isolé (ou <i>acnodale</i>)	$y^2 = x^2 x - 1 $ 
Une racine réelle triple (parabole semi-cubique)	cubique à point de rebroussement (ou <i>cuspidale</i>)	$y^2 = x^3$ 

Par exemple, l'homologie définie par
$$\begin{cases} x = \frac{X}{Y} \\ y = \frac{1}{Y} \end{cases}$$
 transforme la cubique d'Agnesi : $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

qui a un point isolé à l'infini dans la direction de Oy , en la parabole divergente : $X^2 = Y^3 - Y^2$ qui a son point isolé en O .

Dans la figure 11 , nous avons utilisé $y = -\frac{1}{Y}$ au lieu de $y = \frac{1}{Y}$ pour plus de lisibilité.

fig. 11 : une cubique d'Agnesi ramenée par perspective en une parabole divergente



III) Transformations circulaires.

Les *transformations circulaires* sont les bijections transformant des points alignés ou cocycliques en des points ayant la même propriété, cette fois dans le *plan conforme*. On montre que ce sont exactement les homographies et les anti-homographies (produit des précédentes avec une réflexion) de ce plan conforme vu comme droite projective complexe. Celles d'entre-elles qui conservent les droites sont les similitudes, et les autres sont composées d'une inversion et de similitudes ; on ne va donc s'intéresser ici qu'aux inversions.

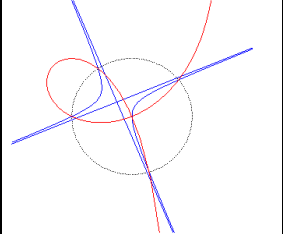
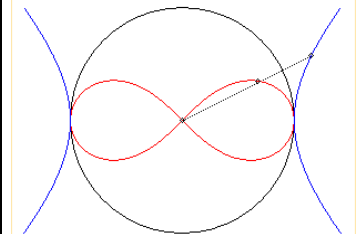
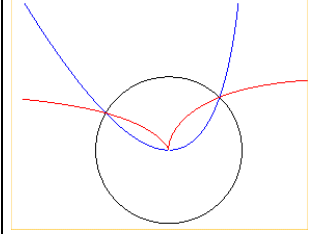
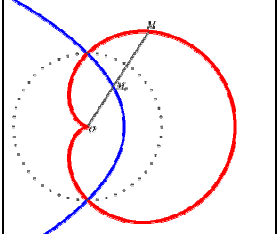
C'est en coordonnées polaires que l'expression de l'inverse d'une courbe est la plus simple, puisque l'image de la courbe $\rho = f(\theta)$ par l'inversion de centre O et de puissance a^2 est la courbe $\rho = \frac{a^2}{f(\theta)}$.

L'inversion conserve le caractère algébrique, mais pas le degré des courbes ; l'inverse d'une courbe algébrique de degré n , admettant les points cycliques (points complexes à l'infini de coordonnées homogènes $(1, \pm i, 0)$) comme points d'ordre p , par rapport à un pôle d'inversion d'ordre q (pour la courbe de départ), est une courbe de degré $2n - 2p - q$, admettant les points cycliques comme points d'ordre $n - p - q$ et le pôle comme point d'ordre $n - 2p$.

Par exemple, les inverses des coniques propres non circulaires sont les cubiques circulaires rationnelles lorsque le pôle d'inversion est sur la conique (cas $n = 2, p = 0, q = 1$), et les quartiques bicirculaires lorsqu'il est en dehors ($n = 2, p = 0, q = 0$). Dans le premier cas, la cubique est à point singulier double, isolé ou de rebroussement, suivant que la conique est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Quelques cas particuliers (figure 12) : les inverses d'hyperbole équilatère sont les *strophoïdes* quand le pôle est sur l'hyperbole, et la *lemniscate de Bernoulli* quand il est au centre ; les inverses de parabole sont les *cissoïdes* quand le pôle est sur la parabole, et la *cardioïde* quand il est au foyer (voir figure 12).

fig. 12 : quelques inverses remarquables

 La strophoïde est l'inverse de l'hyperbole équilatère par rapport à l'un de ses points.	 La lemniscate de Bernoulli $\rho^2 = \cos 2\theta$ est l'inverse de l'hyperbole équilatère $\rho^2 = \frac{1}{\cos 2\theta}$ par rapport à son centre.	 La cissoïde est l'inverse de la parabole par rapport à l'un de ses points.	 La cardioïde $\rho = 1 + \cos \theta$ est l'inverse de la parabole $\rho = \frac{1}{1 + \cos \theta}$ par rapport à son foyer.
--	---	--	---

IV) Transformations conformes.

Une *transformation conforme* est un difféomorphisme d'un ouvert connexe D du plan conforme, sur un autre D' , conservant les angles orientés, propriété se traduisant par le fait que la différentielle est une similitude directe ; si l'on identifie le plan P et $\mathbb{C}$, et donc $\bar{P}$ avec la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, cette propriété équivaut à ce que la fonction soit holomorphe.

Parmi les exemples précédents, sont conformes les transformations circulaires directes (cas

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}) \text{ et ce sont d'ailleurs les seules transformations conformes de } \bar{P} ; \text{ les}$$

similitudes sont donc les seules transformations conformes du plan affine P .

Par contre, il existe toujours au moins une transformation conforme entre deux ouverts simplement connexes du plan P , distincts de P , ceci quelle que soit leur forme (théorème de la représentation conforme). Ceci permet de ramener des ouverts un peu « biscornus » à d'autres plus simples, comme un disque ou un demi-plan.

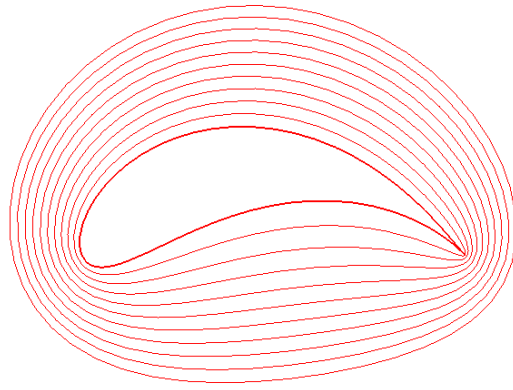
Citons les *courbes de Joukovski*, images des cercles du plan par la transformation conforme

$$\text{de Joukovski } f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) ; \text{ lorsque le cercle de départ passe par } A(a,0) \text{ ou } A'(-a,0)$$

(points fixes de la transformation), la courbe de Joukovski possède un point de rebroussement de deuxième espèce en A , et prend dans certains cas une allure de profil d'aile d'avion.

La transformation de Joukovski réalise alors une représentation conforme de l'extérieur du disque associé au cercle sur l'extérieur de la courbe, ce qui permet d'étudier les problèmes d'écoulement autour du profil de l'aile d'avion en se ramenant à un cercle.

fig. 13



Courbes de Joukovski, images de cercles concentriques par la transformation de Joukovski

tab. 1 : expressions des diverses transformations du premier paragraphe

	Expression analytique	Autre expression	Cas particuliers
Transformation affine du plan affine $\mathbb{R}^2$.	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$ directe si $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} > 0$ indirecte si $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} < 0$	En complexes : $z' = uz + v\bar{z} + w$ avec $\begin{cases} u = \frac{a+e}{2} + i\frac{d-b}{2} \\ v = \frac{a-e}{2} + i\frac{d+b}{2} \end{cases}$	$v = 0$: similitude directe. $u = 0$: similitude indirecte.
Transformation projective du plan projectif $\overline{\mathbb{R}^2}$.	$\begin{cases} x' = \frac{ax+by+c}{gx+hy+k} \\ y' = \frac{dx+ey+f}{gx+hy+k} \end{cases}$	En coordonnées homogènes : $\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$	$g = h = 0, k \neq 0$: transformation affine
Transformation circulaire du plan conforme $\hat{\mathbb{C}}^2$		$z' = \frac{uz+v}{wz+t}$ (cas direct) ou $z' = \frac{u\bar{z}+v}{w\bar{z}+t}$ (cas indirect)	similitude ssi $w = 0$. inversion ssi $u = 0$ et cas indirect.
Transformation conforme d'un ouvert de $\mathbb{C}$ dans un autre.	$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases}$ avec $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$	$z' = f(z)$ avec f holomorphe et $f'(z) \neq 0$	

V) Dualité et polarité.

Les transformations étudiées ici sont de nature différente des précédentes, puisqu'elles transforment des points en des droites ; il est nécessaire pour les définir de rappeler les principes de la dualité.

Le plan projectif $\bar{P}$ est isomorphe à $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$; le plan projectif $\mathbb{P}((\mathbb{R}^3)^*)$ associé au dual de $\mathbb{R}^3$, ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, est en bijection naturelle avec l'ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (noyaux des formes linéaires), lequel est en bijection avec l'ensemble des droites de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$: nous définissons donc le *dual* de $\bar{P}$, noté $\bar{P}^*$ comme l'ensemble des droites de $\bar{P}$, muni de la structure projective issue de cette bijection avec $\mathbb{P}((\mathbb{R}^3)^*)$. Un « point » de $\bar{P}^*$ est donc une droite de $\bar{P}$, et on montre qu'une « droite » de $\bar{P}^*$ est un faisceau linéaire de droites de $\bar{P}$, ensemble de toutes les droites de $\bar{P}$ passant par un point donné.

Les isomorphismes projectifs f entre $\bar{P}$ et son dual, issus des isomorphismes vectoriels entre $\mathbb{R}^3$ et son dual, sont appelés des *dualités*. L'application $\tilde{f}$ de $\bar{P} \cup \bar{P}^*$ dans lui-même, qui prolonge f et à une droite D associe le point de concours des droites de $f(D)$ vérifie la propriété de renversement des appartenances : $M \in D \Leftrightarrow \tilde{f}(D) \in \tilde{f}(M)$; on l'appelle une *corrélation*, et on montre que réciproquement, toute corrélacion est issue d'une dualité.

Nous n'envisagerons dans ce texte que la dualité f qui provient de l'isomorphisme envoyant la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ en la base $(e_1^*, e_2^*, -e_3^*)$ de $(\mathbb{R}^3)^*$, qui a une définition très simple : au point de coordonnées (u, v) correspond la droite d'équation $ux + vy = 1$ et l'image d'un point à l'infini est la droite passant par O et perpendiculaire à la direction du point. Nous retrouvons ici les pôles et polaires : la *polaire* d'un point $M_0(u, v)$ par rapport au cercle (C) de centre O et de rayon a est le lieu des conjugués harmoniques du point par rapport au cercle, défini par la relation $\overrightarrow{OM} \overrightarrow{OM_0} = ux + vy = a^2$; c'est la droite orthogonale à la droite (OM_0) passant par l'inverse de M_0 par rapport à (C) ; c'est aussi l'axe radical du cercle (C) et du cercle de diamètre $[O M_0]$; quand M_0 est extérieur à (C) , c'est la droite qui joint les points de contact des tangentes issues de M_0 au cercle (C) . Inversement une droite est la polaire d'un unique point, appelé son pôle (cf. figure 15 ci-après).

La relation $\overrightarrow{OM} \overrightarrow{OM_0} = ux + vy = a^2$ montre que dans le cas $a = 1$, la transformation

point $\mapsto$ polaire est bien la dualité f définie ci-dessus et la transformation $\begin{cases} \text{point} \mapsto \text{polaire} \\ \text{droite} \mapsto \text{pôle} \end{cases}$ la corrélacion qui lui est associée, laquelle est ici involutive.

L'image d'une courbe de $\bar{P}$ par cette dualité est alors une « courbe » de $\bar{P}^*$, ensemble de droites de $\bar{P}$; c'est la notion d'enveloppe vue ci-après qui permettra de retrouver une courbe de $\bar{P}$.